منهج

الرياضة

المتقطعة

[redacted]

المنطق الرياضي Mathematical logic

المنطق الرياضي:

هو أحد فروع الرياضيات ويهتم بدراسة القضايا والربط بينها وتحديد ما إذا كان استنتاجاً معيناً منها خاطئاً أم صائباً حسب قواعد محددة باستخدام رموز وإشارات ومصطلحات متعارف عليها بين الرياضيين.

- يهتم المنطق الرياضي بتقديم طرائق البرهان لقضية ما.
- الاهتمام بالتسلسل المنطقي وتبرير خطوات البرهان.
- التمييز بين المعطيات والمطلوب إثباته.

الجملة Sentence

تستخدم الجمل للتعبير عن فكرة أو أفكار معينة فمثلاً يستخدم الرياضيون الجمل الرياضية للتعبير عن أفكارهم كالآتي: إذا كان $x = y$ فإن $y^2 = x^2$ وتنقسم الجملة في اللغة إلى قسمين مختلفين:

أولاً: الجمل الإنشائية (التي لا تحمل خبراً معيناً) مثل:

1. لا تصاحب الأشرار. 2. صاحب الأخيار 3. كم عمرك ؟ 4. ما أجمل الربيع !

ثانياً: الجمل الخبرية (التي تحمل خبراً معيناً) مثل:

1. $2+3>1$ 2. الصلاة ركن من أركان الإسلام 3. $\sqrt{9}=3$

العبارة (القضية)

القضية هي جملة خبرية وتكون إما صادقة أو كاذبة وليس الاثنين معاً.

نرمز للقضايا بالرموز $p,q,r,...$

تعريف:

صدق أو كذب القضية يسمى بقيمة الصدق للقضية ،يقرن مع القضية الصادقة الرمز T ومع القضية الكاذبة الرمز F

المنطق والرياضيات لا يختلفان إلا كما يختلف الصبي عن الرجل فالمنطق صبى الرياضيات والرياضيات رجولة المنطق.

مثال:

الجمل الآتية تعتبر عبارات " قضايا "

1- [redacted] إحدى مدن [redacted].　　2- العدد 2 عدد أولى.　　3- المعادن تتمدد بالحرارة.

4- غداً هو يوم الثلاثاء.　　5- القدس مدينة عربية　　6- محمد رسول الله

بينما الجمل الآتية والمكونة من تساءلات أو أوامر أو تعجب أو أماني لا تعتبر قضايا لأنها ليس لها قيمة صدق.

1- كم الساعة الآن؟　　2- x أكبر من y　　3- كيف حالك؟　　4- صباح الخير.

5- ليتني كنت مجتهداً.　　6- هو طالب مجتهد　　7- هي طالبة مؤدبة.

8- عرف الدالة الزوجية.

ملاحظة:

في الجملتين 5،6 بدون معرفة من هو ومن هي لانستطيع الحكم على صحة أو خطأ الجملة.

أنواع القضايا:

القضايا نوعان إما قضايا بسيطة أو مركبة.

*** القضية البسيطة simple (atomic) proposition**

هي القضية التي تحمل خبراً واحداً ولا يمكن تجزئتها إلى قضايا جزئية. مثل ﴿إن الله يحب المحسنين﴾ ، طرابلس عاصمة ليبيا ، $5>2$ ، $1+1=2$ ، 2 عدد زوجي

القضية المركبة compound proposition

هي قضية تتشكل من قضيتين بسيطتين أو أكثر ترتبط مع بعضها البعض بأدوات الربط التي سنذكرها لاحقاً (أي تحمل أكثر من خبر) مثل: ﴿ما عندكم ينفد وما عند الله باق﴾ ، طرابلس عاصمة ليبيا أو بيروت عاصمة لبنان. ، $\sqrt{9}=3$ أو $2\neq 1+1$ $1+1\neq 2$

ملاحظة:

يطلق على القضايا الأصلية المكونة للقضية المركبة اسم مكوناتها ،وقيمة صدق القضية المركبة تعتمد فقط على قيم صدق مكوناتها وعلى نوع الروابط الموجودة.

أدوات الربط المنطقية logical connectives

إذا كانت p,q قضايا بسيطة فإن من أدوات الربط:

1. **النفي** Negation:

لتكن P قضية فإن القضية ليست P تسمى نفي Pويرمز لها بالرمز $\sim p$

مثال:

لتكن P القضية: الرياضيات أم العلوم فإن $\sim p$ تكون القضية ليست الرياضيات أم العلوم.

مثال:

نفرض أن p هي القضية (القدس عاصمة فلسطين) فإن $\sim p$ هي القضية (القدس ليست عاصمة فلسطين)

بديهية النفي:

إذا كانت القضية P صادقة فإن $\sim p$ تكون قضية كاذبة والعكس بالعكس.

لتوضيح العلاقة بين قضية ونفيها نستخدم جداول الصدق كما هو موضح فيما يلي:

p	$\sim p$
T	F
F	T

مثال:

لتكن p القضية: $a=b$ فإن $\sim p$ يكون القضية $a \neq b$

ملاحظة:

لتكن p قضية فإن نفي $\sim p$ هي القضية نفسها p أي أن: $(p\sim)\sim(\sim p)$ هي p .

2. أداة الوصل" conjunction و $\wedge$ " تربط بين القضيتين البسيطتين p,q ويرمز لذلك بالرمز $p\wedge q$ وتكون $p\wedge q$ صحيحة إذا كان كلا القضيتين p,qصحيحة في نفس الوقت.

والجدول الآتي يوضح ذلك.

- **إن الرغبة المشتعلة والشديدة هي القوة الدافعة التي تمكنك منَ التغلب على أي عائق يظهر في طريقك.**
- **إذا لم تعلم أين تذهب ،فكل الطرق تفي بالغرض.**
- **إذا طعنت من الخلف ،فاعلم أنك في المقدمة.**
- **لا تجادل الأحمق ،فقد يخطئ الناس في التفريق بينكما .**

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

مثال:

القضية $p: 2+3=7$ قضية كاذبة و القضية $q: 1+10=11$ قضية صادقة فعلية تكون القضية المركبة $p \wedge q$ كاذبة أي أن القضية $(2+3=7, 1+10=11)$ كاذبة.

3- أداة الفصل" disjunction أو $\vee$ " تربط بين p, q ويرمز لذلك بالرمز $p \vee q$ وتكون صحيحة إذا كانت على الأقل احدي القضيتين صحيحة. والجدول الآتي يوضح ذلك.

p	q	$q \vee p$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

مثال:

زليتن في ليبيا. قضية صادقة والقضية: سرت في سوريا قضية كاذبة وعليه تكون القضية المركبة (زليتن في ليبيا أو سرت في سوريا) " قضية صادقة ".

مثال:

القضية المركبة $2+3=5 \vee 2>5$ صادقة

- **أجمل ما في الحياة أن تبني جسرا من الأمل، فوق بحيرة من اليأس.**
- **احرص على نفع الآخرين ومساعدتهم ومد يد العون لهم فان صدى هذا الخير يرجع إليك وأثره ينالك لا محالة.**
- **تذكر أن التفاؤل سبيل عظيم نحو السعادة الداخلية فلا تحرم نفسك إياه فقط انظر إلى الجانب المشرق والجميل في الأشياء.**
- **الحياة بمشاكلها لا يصلح لها علاج وما يصلح معها هو التصرف مع أمورها المحيرة.**
- **أنظر إلي الحياة علي أنها رحلة تنتقل فيها من مكان لمكان ولزاماً عليك أن تتكيف مع ظروف كل مكان لتحقق عادة النجاح.**
- **لا تقلد احداً في الامور السلبية و التشاؤمية.**

ملاحظة:

نظراً لوجود استعمالين لـــ " أو " في اللغة العربية حيث (pأو q) قد تعني (pأو q أوكليهما) وفي هذه الحالة تسمى " أو " الشاملة ،وقد تعني (pأو q ولكن ليس كليهما) وفي هذه الحالة تسمى " أو " المانعة وفي هذا الكتاب استخدمنا الرمز $\vee$ للتعبير عن أو الشاملة.

وباستخدام أدوات الربط السابقة نعبر رمزيا عن القضية (pأو q ولكن لـــيس كليهمـــا) بالـــصورة:

$(p \vee q) \wedge (\sim(p \wedge q))$

4. الاشتراط Conditional

ليكن كل من p ،q قضية سنرمز للقضية المركبة إذا كان p فإن q بالرمز $p \to q$ ونـــسميها قـــضية اشتراطية ونطلق على p مقدم القضية و q النتيجة.

القضية المركبة $p \to q$ تكون صادقة دائماً ما عدا في حالة واحدة وهي عندما تكون p صادقة ،و q كاذبة لأن الصدق لا يؤدى إلى الكذب. والجدول التالي يوضح ذلك:

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ملاحظة:

إذا كان لدينا قضية مركبة مكونة من العدد n من القضايا الأساسية البسيطة فإن عدد صفوف جـــدول الصدق لهذه القضية المركبة هو 2^n

مثال:

(إذا كانت بيروت عاصمة سوريا فإن القدس عاصمة فلسطين). قضية صادقة

مثال:

(إذا كان $3 = 2$ فإن $\sqrt{9} = 5$).قضية صادقة

ملاحظة: التعابير التالية تعطي نفس المعنى.

1. $p \to q$ 2. إذا كان p فإن q ، 3. p تؤدى إلى q

تفوق في المجالات التي تمتلك الموهبة فيها دون خوف.

4. q إذا p 5. p شرط كاف لـــ q 6. q هي شرط ضروري لـــ p

7. q تستنتج من p

5. القضايا الثنائية الاشتراط:

ليكن كل من p، q قضية ،نرمز للقضية المركبة p إذا وإذا كان فقط q بالرمز $p \leftrightarrow q$ ونسميها قضية ثنائية الاشتراط وتكون صادقة عندما تكون قيمة صدق p تساوي قيمة صدق p وما عدا ذلك تكون كاذبة. والجدول التالي يوضح ذلك:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال:

القضية: ($2 = 1+1$ إذا وإذا كان فقط $5 < 3$) كاذبة بينما القضية التالية صادقة:

$\sqrt{4} = 3$ إذا وإذا كان فقط $5 > 2$

التنقيط المنطقي:

التنقيط المنطقي هو وضع الأقواس في القضية المركبة لتحديد نطاق تأثير أدوات الربط لتجنب الغموض الذي قد ينشأ من عدم وجود تلك الأقواس ومن ثم تعيين أداة الربط الرئيسية في القضية التي تحدد قيمة صدق القضية.

فمثلاً هناك غموض في مدلول القضية $p \to q \vee r$ ولانعرف مإذا كانت تعني $p \to (q \vee r)$ أو تعني $(p \to q) \vee r$ لذلك لتحديد مدلول القضية تحديداً واضحاً يجب وضع الأقواس حسب المعنى المطلوب علماً بأن أدوات الربط تنقسم إلى قسمين:

1. أداة ربط ذات حد واحد وهي النفي وتأثيرها على القضية التي تأتي بعدها فقط.
2. أداة ربط ذات حدين وهي المسبوقة بقضية p ومتبوعة بقضية q وتأثيرها على القضيتين p,q وهذه الأدوات هي $\leftrightarrow, \to, \wedge, \vee$

يمكنك أن تتعلم أي شيء تحتاج تعلمه لتحقيق أي هدف تحدده لنفسك فقط أمتلك الارادة.
الضربات القوية تهشم الزجاج لكنها تصقل الحديد.

مثال:

في القضية $(p \to q) \vee (p \wedge q)$ يكون تأثير أداة الربط $\vee$ على $p \wedge q$ من جهة وعلى $p \to q$ من الجهة الأخرى ،ونطاق تأثير كل من $\wedge$, $\to$ يكون على p من جهة وعلى q من الجهة الأخرى.

مثال:

في القضية $\sim(p \leftrightarrow (q \vee r))$ نلاحظ أن أداة الربط ($\sim$) تؤثر على القضايا p,q,r بينما تأثير $\leftrightarrow$ يكون على p من جهة وعلى $q \vee r$ من الجهة الأخرى أما تأثير $\vee$ يكون على q من جهة وعلى r من الجهة الأخرى وعليه نلاحظ أن أداة الربط($\sim$) التي لها أكبر تأثير على القضية وبذلك تكون أدلة النفي هي أداة الربط الرئيسية في القضية.

مثال:

نقط القضية: $p \to q \wedge \sim r \vee p \leftrightarrow q \vee r \wedge p \to r$ منطقياً بحيث تكون:

- أداة الربط الرئيسية هي $\leftrightarrow$
- تأثير أداة النفي على r,p
- تأثير $\to$ الأولى على p,q
- تأثير $\to$ الثانية على p,r
- تأثير $\vee$ الأولى على p,r
- تأثير $\vee$ الثانية على q,r
- تأثير $\wedge$ الأولى على p,q,r
- تأثير $\wedge$ الثانية على p,q,r

الحل:

لجعل $\leftrightarrow$ أداة الربط الرئيسية نضع القضية المسبوقة داخل قوسين والقضية المتبوعة داخل قوسين كما يلي: $[p \to q \wedge \sim r \vee p] \leftrightarrow [q \vee r \wedge p \to r]$

ثم ننقط القضايا الأخرى وفقاً للمطلوب فنحصل على القضية:

$$[(p \to q) \wedge \sim (r \vee p)] \leftrightarrow [(q \vee r) \wedge (p \to r)]$$

- **الفشل في التخطيط يقود إلى التخطيط للفشل.**
- **قد يجد الجبان 36 حلاً لمشكلته ولكن لا يعجبه سوى حل واحد منها وهو .. الفرار.**

[redacted]

المتغيرات Variables

المتغير هو حرف أو رمز يمثل عناصر متعددة من مجموعة شاملة ما ،مثلا الجملة $x > 1$ ليست قضية ولكن $2 > 1$ قضية صادقة كذلك ($x < 3$ لكل عدد حقيقي x) هي قضية كاذبة.

الجمل المفتوحة Open Sentences

لتكن A مجموعة ما وليكن $p(x)$ تعبيرا ما في متغير x فإن $p(x)$ يسمى جملة مفتوحة في x معرفة على A إذا وإذا كان فقط $p(a)$ قضية صادقة أو كاذبة لكل $a \in A$.

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3\}$ فإن التعبير $x - 1 < 4$ يشكل جملة مفتوحة في x معرفة على A حيث كلاً من: $1-1<4$ ، $2-1<4$ ، $3-1<4$ قضية صادقة.

مجموعة الحل

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة معرفة على A وليكن $a \in A$ فإذا كان $p(a)$ قضية صادقة فتسمى a حلاً للجملة المفتوحة $p(x)$ وتسمى مجموعة كل الحلول للجملة $p(x)$ بمجموعة الحلول للجملة ويرمز لها بالرمز T_p أي أن: $T_p = \{a \in A : \text{قضية صادقة } p(a)\}$

مثال:

لتكن $A = \{1,2,3,4\}$ ولتكن $x + 2 < 5$ جملة مفتوحة في x معرفة على A فإن $T_p = \{1,2\}$

تمارين محلولة

س1- أي من الجمل الآتية قضايا ،بين السبب

أ. $x \le 5$ ب. $x + y = y + x$ ج. لادخان بدون نار   د. هذه جملة كاذبة

هـ. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ و. إذا كان x, y عددين حقيقتين فإن $x + y = y + x$

الحل

أ. ليست قضية لأن x متغير.   ب. ليست قضية لأن قيمتا x, y غير معلومات   ج. قضية صادقة

د. ليست قضية.   هـ. قضية صادقة.   و. قضية صادقة لأنه حدد قيمة x, y بأنهما عددين حقيقين

عندما تعتاد على البحث عن الشيء الجيد في كل موقف فانت تنمي موقفاً عقلياً إيجابياً وعندئذ لا يمكن لأحد إيقافك.

س2- أوجد مجموعة الحل لكل مما يأتي:

أ- $x-2<5$ المجموعة الشاملة هي $\{0,1,2,3\}$

ب- $1+|x|<3$ المجموعة الشاملة هي $\{0,1,2,3,5\}$

ج- $2x^2+3x+1=0$ المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد النسبية " القياسية"

د- $x^2+1=0$ المجموعة الشاملة هي مجموعة الأعداد الحقيقية.

الحل

أ- $T_p=\{0,1,2,3\}$ ب- $T_p=\{0,1\}$ ج- $T_p=\left\{-1,-\frac{1}{2}\right\}$ د- $T_p=\phi$

س3- أوجد قيمة صدق ما يأتي حيث $x\in\Re$، و f دالة ذات قيم حقيقة

أ- إذا كانت $f(x)=x^3$ فإن $f'(x)=3x^2$

ب- إذا كان: $x=0$ أو $x=1$ فإن $x^2=x$

ج- إذا كانت الدالة مستمرة فهي قابلة للاشتقاق.

الحل

أ- صادقة ب- صادقة ج- كاذبة

س4- أوجد قيمة الصدق للقضايا الآتية:

1- e عدد قياسي و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1$ 2- مكة عاصمة السعودية أو π عدد حقيقي.

3- $4\neq 7$ 4- (π عدد غير قياسي) 5- $2<1\to 2<3$

الحل

1- $F\wedge F\equiv F$ قيمة الصدق للعبارة خاطئة. 2- $T\vee F\equiv T$ القضية صادقة.

3- القضية صادقة 4- صادقة 5- $F\to T\equiv T$ القضية المركبة صادقة.

س5- أكتب جدول الصدق للقضية $\sim(p\wedge q)\vee\sim(p\leftrightarrow q)$

الحل:

إنه من المخجل التعثر مرتين بالحجر نفسه.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge p)$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim(p \wedge q) \vee \sim(p \leftrightarrow q)$
T	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T

ملاحظة:

س6– عبر عن القضايا الآتية بصورة رمزية:

1. إذا لم يذاكر أحمد في مقرر المنطق فإنه سوف يرسب.
2. أنس تلميذ مجتهد ويحب مدرسته.
3. السماء ممطرة أو الطقس بارد
4. ليس صحيحاً أن: منال لاتحب الرياضيات ومروة تحب اللغة العربية.

الحل

1. نرمز للقضية (أحمد يذاكر في مقرر المنطق) بالرمز p ،ونرمز للقضية (يرسب أحمد في مقرر المنطق الرياضي) بالرمز q .عندئذ ،نحصل على: $\sim p \rightarrow q$
2. نرمز للقضية (أنس تلميذ مجتهد) بالرمز p ،ونرمز للقضية (أنس يحب مدرسته) بالرمز q .عندئذ ،نحصل على: $p \wedge q$
3. نرمز للقضية (السماء ممطرة) بالرمز p ،ونرمز للقضية (الطقس بارد) بالرمز q .عندئذ ،نحصل على: $p \vee q$
4. نرمز للقضية (منال لاتحب الرياضيات) بالرمز p ،ونرمز للقضية (مروة تحب اللغة العربية) بالرمز q .عندئذ نعبر رمزياً عن القضية المركبة السابقة كالتالي: $\sim(p \wedge q)$

- كفاك وقوفا عند أخطاء ماضيك... ولتكن وقفة اعتبار.. تعطيك دفعة جديدة للمستقبل...
- لا تلق باللوم على قلة إمكانياتك.. فكل ما تحتاج إليه يكمن بداخلك.
- النجاح ..يفتح الأبواب.. لمن يحب أن يراه...
- كل حالة أو تجربة تصيبك.... فيها حكمة وعبرة من نصيبك...

تمارين

س1. أكتب القضايا التالية بصورة رمزية ثم أوجد قيمة الصدق لكل قضية ،حيث $x, y \in \Re$

1. إذا كان a ، b عددين صحيحين ، $b \neq 0$ فيكون $\frac{a}{b}$ عددا قياسيا.
2. إذا كان a^2 عددا صحيحا فإن a عدد زوجي أو عدد فردي
3. n عدد صحيح إذا كان عددا طبيعيا
4. المربع هو مستطيل
5. المربعات ليست مثلثات
6. الغدد الصحيح هو عدد قياسي
7. إذا كان $3 < 2$ فإن $-2 < -3$
8. $x = y$ لأن $2x = 2y$
9. $1 + 2 = 3$ أو $1 + 2 = 4$
10. $2x - 2 = 0$ تكافئ $x = 1$
11. ليس صحيحا أن: الخيول تغرد أو $3 < 4$
12. e عدد قياسي و $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = 0$
13. طرابلس عاصمة ليبيا أو بيروت عاصمة لبنان
14. $xy = 0$ إذا وإذا كان فقط $x = 0$ أو $y = 0$
15. ليس صحيحا أنه: إذا كان $1 + 1 = 2$ فإن $2 + 2 = 3$ أو $0 + 0 = 0$

س2. أنشئ جداول الصدق للقضايا الآتية:

1. $p \vee \sim p$
2. $\sim p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge q$
4. $(p \rightarrow \sim q)$
5. $\sim (\sim p \wedge q)$
6. $\sim (\sim p \vee \sim q)$
7. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
8. $\sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$
9. $(p \vee \sim r) \wedge (q \vee \sim r)$
10. $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
11. $(p \wedge (\sim q \rightarrow p)) \wedge \sim ((p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (q \vee \sim p))$
12. $(q \leftrightarrow (r \rightarrow \sim p)) \vee ((\sim q \rightarrow p) \leftrightarrow r)$

الثقة في النفس طريق النجاح ،والنجاح يدعم الثقة في النفس ،والخوف من أي محاولة جديدة طريق حتمي للفشل ،ورؤيتك السلبية لنفسك سبب فشلك في الحياة ،ورؤيتك الايجابية لنفسك تدفعك دائماً إلى النجاح.

التكافؤ المنطقي

تعريف:

ليكن كل من p ، q قضية يقال بأن القضية p تكافئ القضية q منطقياً إذا وإذا كان فقط جدول صدق p هو نفسه جدول صدق q ونعبر عن ذلك بالرمز $p \equiv q$

مثال:

$p \to q$ تكافئ $\sim p \vee q$ والجدول التالي يوضح ذلك:

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

$\therefore \sim p \vee q \equiv p \to q$

مبرهنة:

لأي قضية p يكون:

1- $p \equiv p$ 2- $p \wedge p \equiv p$ 3- $p \vee p \equiv p$

البرهان:

يتم باستخدام جداول الصدق (يترك تمرين للطالب)

مبرهنة:

لأي قضيتين p ، q يكون: $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

البرهان:

نستخدم جداول الصدق كما هو موضح فيما يلي:

- كن مع الناس كالشجر يرمونه بالحجر فيرميهم بالثمر.
- المعلم الحقيقي هو مجرد بركة ماء تستطيع فيها أن تتعلم السباحة ....وحالما تتعلمها... بإمكانك السباحة في جميع محيطات العالم وما وراء المعالم والعوالم والعلوم...

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

التتولوجي " تحصيل حاصل " *Tautolagy*

تعريف:

إذا كانت قضية مركبة صادقة بغض النظر عن قيمة صدق مكوناتها فإنها تسمى (تحصيل حاصل) (تتولوجي) صائبة منطقياً ،ونرمز لها بالرمز I

مثال

القضية $p \vee \sim p$ صائبة منطقياً كما هو موضح بالجدول الآتي:

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

ملاحظة

لتكن كل من p ، q قضية فإن القضية $(p \leftrightarrow q)$ صائبة منطقياً إذا وإذا كان فقط $p \equiv q$.

قانون القياس

لتكن كل من p,q,r قضية فإن القضية المركبة $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ تكون صائبة منطقياً وهذا يسمى بقانون القياس.

تعريف:

إذا كانت قضية مركبة كاذبة بغض النظر عن قيمة صدق مكوناتها فإنها تسمى تناقض.

،نرمز لها بالرمز O

- **لا تلق اللوم على من حولك......لا تستسلم للفشل.**
- **الأهم من أن تتقدم بسرعة هو أن تتقدم في الاتجاه الصحيح.**
- **مأساة الحياة لا تكمن في عدم وصولك إلى الهدف ولكنها تكمن في ألا يكون لك هدف تحاول الوصول إليه.**
- **الكثير من الفاشلين في الحياة هم أشخاص لم يعرفوا كم كانوا قريبين من النجاح عندما استسلموا للفشل.**
- **إذا لم تستطع اختراق الجبل ....سر من حوله ،وإذا لم تستطع ...سر من فوقه ،وإذا لم تستطع ... قم بحفر خندق.**
- **أفضل طريقة للتقدم هي أن تساعد الآخرين في التقدم للأمام.**

مثال:

القضية المركبة $p \wedge \sim p$ تناقض كما هو موضح بالجدول التالي:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	F
F	T	F

ملاحظة:

القضية p تسمى تناقض إذا وإذا كان فقط $\sim p$ صائبة.

مبرهنة:

لتكن p أي قضية فإن:

1- $P \wedge I = P$ 2- $P \vee O \equiv P$ 3- $P \vee I = I$ 4- $P \wedge O = O$

البرهان:

يترك تمرين للطالب

مثال:

جدول الصدق التالي يوضح أن القضية $[p \wedge (p \to q)] \to q$ صائبة منطقياً:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

الكثير تنقصه الثقة في النفس في شتى مجالات حياته وقد تحدث بعض الأمور تعيق هذه الثقة لذلك لنقرأ هذه الكلمات البسيطة بتمعن ونؤمن بجدواها ومدى فعاليتها في النفس.

سئل نابليون: كيف استطعت أن تولد الثقة في نفوس أفراد جيشك .؟! فأجاب: كنت أرد على ثلاث بثلاث ؟؟

من قال لا أقدر قلت له حاول ،ومن قال لا أعرف قلت له تعلم ،و من قال مستحيل قلت له جرب.

كلمات بسيطة وسهلة ولكنها ذات تأثير كبير في النفس ،فقط نحن محتاجون للإيمان بمدى تأثير هذه الكلمات فهل سنحاول ونتعلم ونجرب ؟؟

مثال:

جدول الصدق التالي يوضح أن القضية $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$ صائبة منطقياً:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
T	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T

مثال:

جدول الصدق التالي يوضح أن القضية $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ تناقض:

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$(p \to q) \leftrightarrow p \wedge \sim q)$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

مثال:

جدول الصدق التالي يوضح أن القضية $(p \to \sim q)$ غير محددة منطقياً:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

- تعلم ما استطعت تكن أميراً ...... ولا تكن جاهلا تبقى أسيراً.
- النجاح يفتح الأبواب لمن يحب أن يراه.
- كل حالة أو تجربة تصيبك.... فيها حكمة وعبرة من نصيبك.

الاستنتاج المنطقي (الاقتضاء المنطقي)

تعريف:

ليكن كل من p ، q قضية يقال أن القضية p تقتضي منطقياً q (q تستنتج من p) إذا وإذا كان فقط القضية $p \to q$ صائبة منطقياً ويعبر عن ذلك بالرمز $p \Rightarrow q$

مثال

ليكن $s : [(p \to q) \wedge (q \to r]$ ، $t : (p \to r)$

وبما أن $s \to t$ صائبة منطقياً فإن $s \Rightarrow t$

مثال

اثبت أن $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$

الاثبات:

نكون جدول الصدق للقضية الشرطية $p \wedge (p \to q) \to q$

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

من خلال الجدول نلاحظ أن القضية $p \wedge (p \to q) \to q$ صائبة منطقياً وهذا يعني أن

$p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$

ملاحظة:

بالإضافة إلى جدول الصدق يمكن اثبات أي اقتضاء منطقي $A \Rightarrow B$ باثبات صواب النتيجة B عندما يكون الفرض A صواب وبهذا نضمن صواب القضية الشرطية $A \to B$ وكذلك يمكن اثبات أي اقتضاء منطقي $A \Rightarrow B$ باثبات خطأ المقدمة A عندما تكون النتيجة B خاطئة وبهذا نضمن صواب القضية الشرطية $A \to B$ ،والأمثلة التالية توضح ذلك:

يظن بعض الناس أن الشعور بالسعادة هو نتيجة النجاح ولكن العكس هو الصحيح حيث أن النجاح هو نتيجة الشعور بالسعادة.

مثال

ليكن p,q,r أي قضايا. باستخدام طريقة فرض صواب المقدمة برهن أن: $(p\vee q)\wedge\sim p\Rightarrow\sim p\wedge q$

البرهان:

نفرض أن المقدمة $(p\vee q)\wedge\sim p$ صائبة.

هذا يعني أن كل من $\sim p$, $p\vee q$ صائبة وبما أن $\sim p$ صائبة فإن p تكون خاطئة

وبما أن $p\vee q$ صائبة، و p خاطئة فإن q يجب أن تكون صائبة وبالتالي نستنتج أن $\sim p\wedge q$ صائبة

إذاً $(p\vee q)\wedge\sim p\to\sim p\wedge q$ صائبة منطقياً وهذا يبرهن أن $(p\vee q)\wedge\sim p\Rightarrow\sim p\wedge q$

مثال

ليكن p,q,r أي قضايا. باستخدام طريقة فرض خطأ النتيجة برهن أن: $(p\to q)\wedge\sim q\Rightarrow\sim q$

البرهان:

نفرض أن النتيجة $\sim q$ خاطئة وبالتالي فإن $(p\to q)\wedge\sim q$ تكون خاطئة مهما كانت قيمة صدق القضية $p\to q$

إذاً $[(p\to q)\wedge\sim q]\to\sim q$ صائبة منطقياً وهذا يبرهن أن $(p\to q)\wedge\sim q\Rightarrow\sim q$

مبرهنة:

ليكن كل من p، q قضية فإن:

1. $p\Rightarrow q$ إذا وإذا كان فقط $\sim p\vee q$ صائبة منطقياً
2. إذا كانت $p\Rightarrow q$ ، $q\Rightarrow p$ فإن $p\equiv q$

البرهان

1. حسب التعريف $p\Rightarrow q$ إذا وإذا كان فقط $p\to q$ صائبة منطقياً

ولكن $\sim p\vee q\equiv p\to q$ وبالتالي فإن $p\Rightarrow q$ إذا وإذا كان فقط $\sim p\vee q$ قضية صائبة منطقياً

2. بما أن $p\Rightarrow q$ تعني أن $p\to q$ صائبة منطقياً وبما أن $q\Rightarrow p$ تعني أن $q\to p$ صائبة منطقياً.

فإن القضية $(p\to q)\wedge(q\to p)$ صائبة منطقياً أي أن: $p\leftrightarrow q$ صائبة منطقياً ولذلك فإن $p\equiv q$

تعريف: (معكوس القضية)

القضية $q\to p$ تسمى معكوس القضية $p\to q$

كن مع الناس كالشجر يرمونه بالحجر فيرميهم بالثمر.

[redacted] [redacted]

لاحظ أن: القضية ومعكوسها غير متكافئتين بصورة عامة ،أي أن: $q \to p \not\equiv p \to q$

ولذلك فإن $p \Rightarrow q$ لا تعني بالضرورة $q \Rightarrow p$

> **تعريف:** (المعاكس الإيجابي)
>
> القضية $\sim q \to \sim p$ تسمى المعاكس الإيجابي للقضية $p \to q$

ملاحظة:

من جدول الصدق التالي نلاحظ أن $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ وبالتالي فإن $p \Rightarrow q$ تعني $\sim q \Rightarrow \sim p$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

مثال:

القضية: المثلث المتساوي الأضلاع يكون متساوي الساقين تكافئ القضية: (المثلث غير متساوي الساقين يكون غير متساوي الأضلاع) لأن القضية الأولى من نوع $p \to q$ والثانية من نوع $\sim q \to \sim p$

دعوة إلى الفشل ...!!!!!

يتساءل بعض القراء - ربما - عن ما إذا كان للفشل متعة ما ،يمكن أن نتلمسها ،ونطلبها حيث كانت ،والرائي المتمحص ،يرى في الفشل متعة ليست بأقل قدرا من متعة النجاح ،إذ إن الفشل ما هو إلا خطوة في درب النجاح ،ومن لا يعرف الفشل لن يتعرف على النجاح ،إنك تستطيع أن تجعل الفشل سلماً ،وتستطيع أن تجعل منه قمقماً تلجه ولن يكون لك منه مخرج.

ما هو الفشل ؟

الفشل ما هو إلا عثرة ،ولا يستطيع الطفل النهوض والمشي دون سيل من العثرات ،ولم نسمع أن أحداً لم يمش بسبب تعثره طفلاً ،ولنا أن نتخذ من أنفسنا مثالاً حياً ،الطفل يمتلك بالفطرة قوة هائلة من العزم والهمة العالية أكبر من كثير من الرجال ،فإذا كنا نتمتع بهذه القوة وهذا التحدي وهذه الهمة ونحن أطفال فلما نتخلى عنها حينما تكبر في أعيننا الأمنيات ،يأسرنا الفشل ،نغرق في بحره ،لا نستطيع فكاكاً من ربقته .

مرحباً بالخطب يبلوني إذا كانت العلياء فيه السببا

فأهلاً بهذا الفشل اللذيذ ،هل تعلم أنه " بتقبلك الفشل " تستطيع أن تتمتع بكل لحظة فشلت بها ؟ ،لم نقل " بقبولك الفشل " لأننا لا نقبل الفشل ،بل نتقبله خطوة على سبيل تجاوزه ،الفشل فاكهة النجاح .

هل بالتعثر تقفل الدنيا شوارعها ؟ هل تغلق الأبواب ؟ هل تمنع الفجر البلوج؟ وتقطع الأسباب ؟ هل إن فشلتم مرةً حل الظلام أمامكم وأظلمت الدنيا وصار نهاركم ليلاً وغم على العقول حجاب ؟

مثال:

القضية: (إذا كان a عدد زوجي فإن a يقبل القسمة على 2) تكافئ القضية: (إذا كان a لايقبل القسمة على 2 فإن a عدد فردي)

جبر القضايا

باستخدام جداول الصدق نستطيع اثبات صحة التكافؤات المنطقية التالية حيث كل من p,q,r قضية ،و I يرمز للقضية الصائبة منطقياً ،و O يرمز للقضية المتناقضة:

1. عدم النمو: $p \vee p \equiv p$ ، $p \wedge p \equiv p$
2. التنسيق: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ ، $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
3. التبديل: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ ، $p \vee q \equiv q \vee p$
4. التوزيع: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ، $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5. الدمج: $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ ، $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
6. دي-مورجان: $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ، $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
7. النفي ونفي النفي: $\sim (I) \equiv O$ ، $\sim (O) \equiv I$ ، $\sim (\sim p) \equiv p$
8. الحياد: $p \vee O \equiv p$ ، $p \wedge I \equiv p$
9. المحدودية: $p \vee I \equiv I$ ، $p \wedge O \equiv O$
10. التكميل: $p \vee \sim p \equiv I$ ، $p \wedge \sim p \equiv O$
11. النقل: إذا كان $p \equiv q \, , q \equiv r$ فإن $p \equiv r$
12. الشرط وعكس النقض: $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$

تطبيقات قوانين جبر القضايا:

تستخدم قوانين جبر القضايا السابقة في اثبات صحة بعض القضايا المنطقية وإيجاد بعض التكافؤات أو تبسيط بعض القضايا كما سنوضح في الامثلة التالية:

مثال:

بسط القضية $\sim (p \vee \sim q)$

الحل

$$\sim (p \vee \sim q) \equiv \sim p \wedge \sim\sim q \equiv \sim p \wedge q$$

مثال:

اثبت أن $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

الاثبات

$$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv \sim\sim p \wedge \sim q \equiv p \wedge \sim q$$

مثال:

اثبت أن: $\sim(\sim p \leftrightarrow q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$

الاثبات

$$\sim(\sim p \leftrightarrow q) \equiv \sim[(\sim p \to q) \wedge (q \to \sim p)] \equiv \sim[(\sim\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim p)]$$
$$\equiv \sim(p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee \sim p) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge p)$$

مثال:

بسط القضية $\sim(\sim p \to \sim q)$

الحل

$$\sim(\sim p \to \sim q) \equiv \sim(\sim\sim p \vee \sim q) \equiv \sim\sim\sim p \wedge \sim\sim q \equiv \sim p \wedge q$$

مثال:

اثبت أن $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

الاثبات

$$p \to (q \wedge r) \equiv \sim p \vee (q \wedge r) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$$

الملاحظات التالية تساعد في تقوية حس التفاؤل عند الإنسان بحيث يستطيع التغلب على مشاكل الحياة بقوة شكيمة وبعزم اكبر.

1. حارب الأفكار السلبية : حاول محاربة الأفكار السلبية والسوداوية ،كذلك لا تكثر من التفكير في المشاكل بل أبعدها قدر الإمكان عن تفكيرك و حاول دوما التفكير بالأمور الإيجابية .

2. علم نفسك دروسا في التفاؤل : ابحث عن الأمور الإيجابية في الأوضاع السلبية. حاول دائما تقييم تجاربك حتى الفاشل منها على أنها خبرات تضاف لحياتك وأنها دروس تعلمت منها أن تكون أكثر صلابة .

3. حدد أهدافا منطقية لحياتك : إذا قمت بتحديد أهداف صعبة جدا فان احتمالات الفشل كبيرة وهذا يؤثر سلبا على نفسيتك. قم بوضع أهدف ممكنة لأنك كلما حققت هدفا زاد ذلك من تفاؤلك. ليس هنا المقصود أن لا تتطلع لإنجازات كبيرة بل أن تقوم بتقسيم أهدافك على مراحل بحيث يصبح تحقيقها يبدو ممكنا .

4. كف عن المبالغة: لا تبالغ في وصف المشكلة التي تواجهها بل حاول أن تقلل من شأن المشكلة.

تمارين

س1. بين أي العبارات الآتية صائبة منطقيا:

1. $(p \vee q) \to (q \vee p)$
2. $(p \wedge (p \to q)) \to q$
3. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
4. $((p \to q) \wedge p) \to q$
5. $((p \to q) \wedge \sim p) \to \sim p$
6. $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

س2. بسط العبارات التالية:

1. $\sim (\sim p \to \sim q)$
2. $\sim (\sim p \to q)$
3. $\sim (\sim p \leftrightarrow q)$
4. $(p \vee q) \wedge \sim p$
5. $(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

س3. برهن أن:

1. $p \vee q \equiv (p \leftrightarrow q) \to q$
2. $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv q \leftrightarrow p$
3. $(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$
4. $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$
5. $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$
6. $p \Rightarrow (q \to r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \to r)$
7. $p \Rightarrow (q \to r) \equiv (p \wedge \sim r) \to \sim q$
8. $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$
9. $q \Rightarrow ((p \wedge q) \leftrightarrow p)$
10. $q \Rightarrow p$ لا تعني $p \Rightarrow q$
11. $\sim q \Rightarrow \sim p$ إذا وإذا كان فقط $p \Rightarrow q$
12. $p \wedge \sim q$ تناقض إذا وإذا كان فقط $p \Rightarrow q$
13. $p \Rightarrow p$
14. إذا كان $p \Rightarrow q \ , \ q \Rightarrow r$ فإن $p \Rightarrow r$

س4. ليكن p,q,r أي قضايا. باستخدام طريقة فرض صواب المقدمة أو طريقة فرض خطا النتيجة برهن أن:

أ) $\sim (p \to q) \Rightarrow p \wedge \sim q$

ب) $(p \wedge q) \to r \Rightarrow (p \wedge \sim r) \to \sim q$

ج) $p \vee (p \wedge q) \Rightarrow p$

د) $\sim p \wedge (p \vee q) \Rightarrow q$

الفرق بين الناجح والفاشل

- الناجح يفكر في الحل والفاشل يفكر في المشكلة.
- الناجح لا تنضب أفكاره والفاشل لا تنضب أعذاره.
- الناجح يساعد الآخرين والفاشل يتوقع المساعدة من الآخرين.
- الناجح يرى حلاً لكل مشكلة والفاشل يرى مشكلة في كل حل.
- الناجح يقول: الحل صعب لكنه ممكن والفاشل يقول: الحل ممكن لكنه صعب.
- الناجح ينظر إلى المستقبل ويتطلع إلى ما هو ممكن والفاشل ينظر إلى الماضي ويتطلع إلى ما هو مستحيل.
- الناجح يصنع الأحداث والفاشل تصنعه الأحداث.
- الناجح لديه أحلام يحققها والفاشل لديه أوهام وأضغاث أحلام يبددها.
- الناجح يناقش بقوة وبلغة لطيفة والفاشل يناقش بضعف وبلغة فظة.
- الناجح يعتبر الإنجاز التزاماً يلبيه والفاشل لا يرى في الإنجاز أكثر من وعد يعطيه.
- الناجح يختار ما يقول والفاشل يقول ما يختار.
- الناجح يتمسك بالقيم ويتنازل عن الصغائر والفاشل يتشبث بالصغائر ويتنازل عن القيم.

المسورات

المسور الجزئي:

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A، القضية يوجد $x \in A$ بحيث $p(x)$ صادقة تسمى قضية مسورة جزئياً وتكتب رمزياً: $\exists x \in A, p(x)$

الرمز $\exists$ يقرأ (يوجد) ويسمى بالمسور الجزئي.

ملاحظة:

القضية $\exists x \in A, p(x)$ تكون صادقة إذا كانت مجموعة الصدق T_p غير خالية أي أن $T_p \neq \phi$

مثال:

$\exists n \in \aleph : 2n-1>5$ قضية صادقة

مثال:

القضية $\exists x \in \Re : x^2+4=0$ كاذبة

تعريف:

لتكن $p(x)$ جملة مفتوحة في x على المجموعة A، القضية: لكل $x \in A$ بحيث $p(x)$ صادقة تسمى قضية مسورة كلياً، وتكتب رمزياً $\forall x \in \mathrm{A}, p(x)$

الرمز $\forall$ يقرأ (لكل) ويسمى بالمسور الكلي.

ملاحظة:

القضية $\forall x \in \mathrm{A}$، $p(x)$ تكون صادقة إذا كانت مجموعة الصدق $T_p = A$

مثال:

$\forall n \in \aleph, n>0$ قضية صادقة

مثال

$\forall x \in Z, x>0$ تكون كاذبة

راقب أفكارك لأنها ستصبح أفعال ...راقب أفعالك لأنها ستصبح عادات ... راقب عاداتك لأنها ستصبح طباع.... راقب طباعك لأنها ستحدد مصيرك.

ملاحظة:

قد يكون في نفس القضية المطروحة مسور كلي واحد أو أكثر ومسور جزئي واحد أو أكثر.

مثلا: $\forall x \in A, \forall y \in A, \forall z \in B, p(x,y,z)$ ، $\forall x \in A, \exists y \in B, p(x,y)$

مثال:

لتكن $A = \{-1,0,1\}$ فإن القضية $\forall x \in A, \exists y \in A, x + y = 0$ صادقة ولكن القضية $\exists y \in A, \forall x \in A, x + y = 0$ كاذبة وهذا يوضح أن $\exists y \forall x, p(x,y) \not\equiv \forall x \exists y, p(x,y)$

نفي القضايا المحتوية على مسورات

القضية: (كل طالب في هذا الفصل معدله ممتاز) نفيها يكون:

ليس صحيحاً أن: كل طالب في هذا الفصل معدله ممتاز

وهذا يعني أنه يوجد على الأقل طالب واحد في هذا الفصل بحيث يكون معدله ليس ممتاز.

بفرض أن A تمثل مجموعة طلاب الفصل فمن الممكن التعبير على القضية بالرموز كما يلي:

x معدله ممتاز $\forall x \in A,$ وبالتالي فإن نفي القضية يكون (x معدله ليس ممتاز $\exists x \in A,$)

وبفرض أن $p(x)$ تعني (x معدله ممتاز) فمن الممكن كتابة التكافؤ أعلاه كما يلي:

$$\sim (\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة ما و $p(x)$ جملة مفتوحة في x معرفة على A فإن:

أ) $\sim (\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

ب) $\sim (\exists x \in A, p(x)) \equiv \forall x \in A, \sim p(x)$

البرهان:

أ) نفرض أن $\sim (\forall x \in A, p(x))$ صادقة أي أن $\forall x \in A, p(x)$ كاذبة

إذاً يوجد $b \in U$ حيث U المجموعة الشاملة بحيث $p(b)$ كاذبة

- الناجحون يتخذون قراراتهم بسرعة ويغيرونها ببطء أما الفاشلون يتخذون قراراتهم ببطء ويغيرونها بسرعة.
- كل ما نراه عظيماً في الحياة بدأ بفكرة ومن بداية صغيرة .
- يوجد هناك دائماً طريقة أفضل للقيام بعمل ما،ويجب أن نحاول دائماً أن نجدها .
- العمل الجيد أفضل بكثير من الكلام الجيد .

$\therefore$ $\sim p(b)$ صادقة وعليه يكون $\exists x \in A, \sim p(x)$ صادقة

وهذا يعني أن $\sim(\forall x \in A, p(x)) \equiv \exists x \in A, \sim p(x)$

وبنفس الطريقة نفرض أن $\sim(\forall x \in A, p(x))$ كاذبة ونبرهن أن $\exists x \in A, \sim p(x)$

ب) يترك تمرين للطالب.

مثال:

$$\sim(\forall x \in Z \exists y \in Z : x + y = 0) \equiv \exists x \in Z \forall y \in Z : x + y \neq 0$$

مثال:

القضية التالية صادقة : $\forall x \in A \forall y \in A \ , x +_3 y = y +_3 x$ حيث $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

مسائل محلولة:

س1. عبر عما يلي باستخدام الرموز المنطقية حيث $p, q, x, y \in \Re$

1) يوجد p ويوجد q بحيث $pq = 32$ 2) يوجد y بحيث لكل x فإن $x + 0 = y$

3) لكل عدد طبيعي n فإن: n عدد زوجي أو n عدد فردي

الحل:

1) $\exists p \in \Re, \exists q \in \Re : pq = 32$ 2) $\exists y \in \Re, \forall x \in \Re : x + 0 = y$

3) $\forall n \in \aleph, (n \in Z_e \vee n \in Z_o)$

لاحظ أن Z_e ترمز للأعداد الصحيحة الزوجية، و Z_o ترمز للاعداد الصحيحة الفردية.

س2. انف القضايا التالية:

1) $\exists x \in \Re \forall y \in \Re : y + x = y$ 2) $\forall n \in \aleph, 2n + 3 > 7$

3) $\forall x \in \Re \forall y \in \Re \exists z \in \Re ; x + y + z = 18$

الحل:

1) $\sim(\exists x \in \Re \forall y \in \Re, y + x = y) \equiv \forall x \in \Re, \exists y \in \Re, y + x \neq y$

2) $\sim(\forall n \in \aleph, 2n + 3 > 7) \equiv \exists n \in \aleph, 2n + 3 \leq 7$

3) $\sim(\forall x \in \Re \forall y \in \Re \exists z \in \Re, x + y + z = 18) \equiv \exists x \in \Re \exists y \in \Re \forall z \in \Re, x + y + z \neq 18$

س3. وضح بمثال أن: $\forall x [p(x) \wedge q(x)] \equiv \forall x, p(x) \wedge \forall x, q(x)$

الحل:

القضية $\forall x \in \aleph [x \geq 1 \wedge 2x \geq 2]$ صادقة وكذلك القضية $\forall x \in \aleph, x \geq 1 \wedge \forall x \in \aleph, 2x \geq 2$ صادقة

ولذلك فإن $\forall x [x \geq 1 \wedge 2x \geq 2] \equiv \forall x, x \geq 1 \wedge \forall x, 2x \geq 2$

س4. استخدم الرموز للتعبير عن القضايا التالية:

1) كل عدد حقيقي موجب له جذر تربيعي.

2) كل مربع مستطيل.

3) إذا كنت طالباً في مقرر المنطق الرياضي وملتزم بالحضور فسوف تحصل على تقدير ممتاز.

4) كل الأعداد الصحيحة تكون أعداد قياسية.

5) يوجد لكل عدد صحيح معكوس جمعي.

6) يوجد لكل عدد حقيقي موجب معكوس ضربي.

الحل:

1) $(\forall x \in \Re)[(x \geq 0) \to (\exists y \in \Re)(x = y.y)]$

أو بالصورة التالية: $(\forall x \in \Re)[(x > 0) \to (\exists y \in \Re)(y = \sqrt{x})]$

2) نفرض أن D هي مجموعة جميع المضلعات ونرمز للقضية x مربع بالرمز S_x ونرمز للقضية x مستطيل بالرمز R_x وبالتالي فإن التعبير الرمزي للقضية يكون كالتالي: $(\forall x \in D)(S_x \to R_x)$

3) نفرض أن مجموعة الطلبة هي S، نرمز للقضية x طالب في مقرر المنطق الرياضي بالرمز L_x، ونرمز للقضية x ملتزم بالحضور بالرمز E_x، ونرمز للقضية x سيحصل على تقدير ممتاز بالرمز A_x وبذلك تكون الصورة الرمزية للقضية المعطاة هي: $(\forall x \in S)[(L_x \wedge E_x) \to A_x]$

4) $(\forall x)(x \in Z \to x \in Q)$

5) $\forall x \in Z\, \exists y \in Z : x + y = 0$

6) $\forall x \in \Re^+\, \exists y \in \Re^+ : xy = 1$ أو $(\forall x \in \Re)[(x > 0) \to (\exists y \in \Re : y = \frac{1}{x})]$

قال حكيم : أربعة حسن ولكن أربعة أحسن !......

1. الحياء... من الرجال حسن..... ولكنه من النساء أحسن.
2. العدل من كل انسان .. حسن..... ولكنه من القضاة والأمراء أحسن.
3. التوبة من الشيخ .. حسن..... ولكنها من الشباب أحسن.
4. الجود من الاغنياء .. حسن..... ولكنه من الفقراء أحسن.

وسئل حكيم آخر: الأغنياء أفضل أم العلماء؟
فقال: العلماء أفضل.
فقيل له: فما بال العلماء يأتون أبواب الأغنياء ولا نرى الأغنياء يأتون أبواب العلماء ؟
فقال: لأن العلماء عرفوا فضل المال. والأغنياء لم يعرفوا فضل العلم.

تمارين:

س1. عبر عن الجمل الإنشائية التالية باستخدام رموز القضايا المسورة

(1) يوجد عدد صحيح موجب حيث يكون أولياً وفردياً.

(2) يوجد عدد حقيقي وحيد بحيث أن جذره عدد صحيح.

(3) كل عدد حقيقي غير سالب يجب أن يكون له جذر تربيعي.

(4) بعض الأعداد الصحيحة تكون مضاعفات للعدد 5

س2. انف العبارات التالية حيث $x, y, z \in Z$:

1) $\forall x \forall y \exists z,\ x + 2y + z = 10$

2) يوجد y بحيث لكل x يكون $xy \le 2$

س3. لتكن المجموعة الشاملة $\Re$. فأي القضايا التالية صحيحة:

(i) $(\forall x)(\exists y)(x + y = 7)$

(ii) $(\exists x)(\forall y)(x - y = 1)$

(iii) $(\exists x)(\exists y)(x^2 + y^2 = -25)$

(iv) $(\exists x)(\forall y)(x \le y + 1)$

(v) $(\exists x)(x < 0 \wedge (x + 1 > 0))$

س4. أكتب كل جملة من الجمل التالية بصورة رمزية:

1) قانون توزيع عملية الضرب على عملية الجمع.

2) مجموع أي عددين فرديين يجب أن يكون عدداً زوجياً.

3) العدد 10 مضاعف موجب لعدد صحيح ما.

4) يوجد لكل عدد قياسي معكوس جمعي.

- ❖ إذا أمضيت وقتاً ممتعاً وأنت تلعب أي رياضة ،فأنت الفائز حتى لو خسرت النتيجة.
- ❖ من أكثر الأسلحة الفعالة التي يملكها الإنسان هي الوقت والصبر.
- ❖ الفاشلين يقسمون إلى قسمين ،قسم يفكر دون تنفيذ ،وقسم ينفذ دون تفكير .
- ❖ الذين لديهم الجرأة على مواجهة الفشل ،هم الذين يقهرون الصعاب وينجحون.
- ❖ الحظ في الحياة هو نقطة الالتقاء بين التحضير الجيد والفرص التي تمر .
- ❖ المتسلق الجيد يركز على هدفه ولا ينظر إلى الأسفل ،حيث المخاطر التي تشتت الذهن.
- ❖ الفشل لا يعتبر أسوأ شيء في هذا العالم ،إنما الفشل هو أن لا نجرب .
- ❖ هناك أناس يسبحون في اتجاه السفينة وهناك أناس يضيعون وقتهم في انتظارها.
- ❖ هناك طريقتان ليكون لديك أعلى مبنى إما أن تدمر كل المباني من حولك ،أو أن تبني أعلى من غيرك اختر دائماً أن تبني أعلى من غيرك .
- ❖ لا ينتهي المرء عندما يخسر ،إنما عندما ينسحب.
- ❖ لا يتم تحقيق أي شيء عظيم في هذه الحياة من دون حماسة.
- ❖ الذي يكسب في النهاية من لديه القدرة على التحمل والصبر.

[redacted]

التعليل المنطقي: (الحجة المنطقية)

تعريف:

لتكن $S_1,S_2,....,S_n$ مجموعة من القضايا ولتكن S قضية يمكن استنتاجها من $S_1,S_2,....,S_n$ فإن هذه المتسلسلة المنتهية من القضايا تسمى حجة منطقية.

حيث $S_1,S_2,....,S_n$ تسمى المقدمات أو الفرضيات ،و S تسمى النتيجة وسنعبر عن الحجة كما يلي: $S_1,S_2,...,S_n,\to S$ أو بالصورة $S\ \therefore\ S_1,S_2,...,S_n$

مثال:

السلسلة التالية من القضايا تسمى حجة منطقية:

مقدمة1: سقراط إنسان.

مقدمة2: كل إنسان فان.

النتيجة: سقراط فان.

وكذلك السلسلة التالية تعتبر حجة منطقية:

مقدمة1: إذا أمطرت السماء فإن أحمد سيكون مريضاً.

مقدمة2: لم تمطر السماء.

النتيجة: أحمد لم يكن مريضاً.

ملاحظة:

قيمة صدق الحجة تعتمد على قيم صدق معينة للقضايا المطروحة في الحجة.

تعريف:

الحجة المنطقية $s_1,s_2,....,s_n \to s$ تكون صائبة إذا وإذا كان فقط $(s_1 \wedge s_2 \wedge ...... \wedge s_n) \to s$ صائبة منطقياً ،أي أن $(s_1 \wedge s_2 \wedge ... \wedge s_n) \Rightarrow s$

أي أن الحجة تكون صائبة في حالة صواب كل المقدمات يؤدي إلى صواب النتيجة أما إذا كانت كل المقدمات صائبة والنتيجة خاطئة كانت الحجة خاطئة.

سوف نستخدم جداول الصدق في اثبات صحة الحجة المنطقية وذلك بتكوين جدول الصدق للقضايا المكونة للحجة ثم نبحث عن الصفوف التي تكون فيها كل المقدمات صائبة فإذا كانت النتيجة في هذه

الصفوف صائبة كانت الحجة صائبة وإذا وجد صف فيه المقدمات صائبة والنتيجة خاطئة كانت الحجة خاطئة. والأمثلة التالية توضح ذلك:

مثال:

لكي نختبر صحة الحجة المنطقية $\sim p\vee q,\sim q\ \therefore\sim p$ نكون جدول الصدق للقضايا المكونة للحجة:

		s	s_2	s_1
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee q$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

نلاحظ من خلال الجدول أن المقدمات صائبة في الصف الأخير فقط وكذلك النتيجة صائبة في هذا الصف ولهذا نستنتج أن الحجة المنطقية صائبة.

مثال:

اختبر صحة الحجة المنطقية التالية:

مقدمة1: إذا أمطرت السماء فإن أحمد سيكون مريضاً.

مقدمة2: لم تمطر السماء.

النتيجة: أحمد لم يكن مريضاً.

الحل:

أولا نعبر رمزياً عن القضايا المكونة للحجة:

p : السماء تمطر

q: أحمد مريض

وبذلك ستكون الحجة على الصورة:

$$p\rightarrow q$$
$$\sim p$$
$$\therefore\sim q$$

ثانياً نكون جدول الصدق للقضايا المكونة للحجة:

			s_2	s	s_1
	p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$
1	T	T	F	F	T
2	T	F	F	T	F
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	T	T

نلاحظ من خلال الجدول أن المقدمات صائبة في الصفين (3)، (4) ولكن النتيجة خاطئة في الصف (3) ولهذا نستنتج أن الحجة المنطقية خاطئة.

تمارين:

باستخدام جدول الصدق بين ما إذا كانت الحجج التالية صحيحة أو باطلة:

1) مقدمة1: إذا كان أنس طالباً مجتهداً فإنه سوف ينجح في مقرر أسس الرياضيات.

مقدمة2: أنس طالب ذكي لكنه غير مجتهد.

النتيجة: أنس سينجح في مقرر أسس الرياضيات.

2) مقدمة1: إذا درست فإنني سأنجح في مقرر أسس الرياضيات.

مقدمة2: إذا لم أتابع المسلسلات والأفلام فإنني سأدرس.

مقدمة3: لقد رسبت في مقرر أسس الرياضيات.

النتيجة: لقد تابعت المسلسلات والأفلام.

3) مقدمة1: خالد مزارع أو مدرس ولكنه ليس مدرساً ومزارعاً.

مقدمة2: إذا كان يحمل قلماً فإنه مدرس.

مقدمة3: خالد مزارع.

النتيجة: خالد لا يحمل قلماً.

[redacted] [redacted]

الاستدلال المنطقي:

خلال دراستنا السابقة للحجة المنطقية استخدمنا جداول الصدق للحكم على صحة الحجـــة المنطقيـــة ولكن عندما يكون عدد القضايا المكونة للحجة كبير سنحتاج إلى جهد ووقت كبيرين للحكـــم علـــى صحتها من خلال جداول الصدق ولذلك سوف نبحث عن طرائق أخرى أسهل نستطيع من خلالهـــا اثبات صحة الحجة المنطقية وكذلك اثبات التضمين المنطقي والتكافؤ المنطقي وتتلخص هذه الطريقة في ثلاث قواعد رئيسية هي:

1. قاعدة التحويل. 2. قاعدة التعويض. 3. قاعدة القضية المقيدة.

أولاً: قاعدة التحويل

ليكن لدينا القضية A المركبة من القضايا البسيطة: $t_1, t_2, \ldots\ldots, t_n$ وليكن $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$ قضايا اختيارية.

الآن نكون القضية B من القضية A باستبدال أي قضية t_i بالقضية p_i في أي موضع تظهر فيه القضية p_i في A لأي $i = 1,2,\ldots,n$ مع الإبقاء على أدوات الربط والتنقيط المنطقي دون تغيير فإذا كانت القضية A صائبة منطقياً فإن القضية B تكون صائبة منطقياً.

مثال:

لتكن القضية $p \to (p \vee q)$ وليكن $\sim A, A \to B$ قضايا اختيارية فإذا استبدلنا p بالقضية $\sim A$ وكذلك القضية q بالقضية $A \to B$ فنحصل على القضية $\sim A \to (\sim A \vee (A \to B))$ التي تكافئ منطقياً القضية $p \to (p \vee q)$ كما هو واضح من الجدولين التاليين:

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

A	B	$\sim A$	$A \to B$	$\sim A \vee (A \to B)$	$\sim A \to (\sim A \vee (A \to B))$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

ثانياً: قاعدة التعويض

ليكن h احدى القضايا المكونة للقضية المركبة A ،وليكن k قضية تكافئ منطقياً القضية h ،فإذا كانت القضية B مكونة من القضية A وذلك بالتعويض عن القضية h بالقضية k في بعض المواقع التي تظهر فيها h فإن القضية B تكافئ منطقياً القضية A

مثال:

ليكن لدينا القضية $p \vee (q \to r)$ فإذا عوضنا عن $q \to r$ بـ $\sim q \vee r$ نحصل على القضية $p \vee (\sim q \vee r)$ ومن السهل التحقق من أن $p \vee (\sim q \vee r) \equiv p \vee (q \to r)$

ثالثاً: القضية المقيدة

إذا كانت القضية المركبة A لا تحتوي على أدوات ربط خلاف $\wedge, \vee, \sim$ فإنها تسمى قضية مقيدة.

إذا استبدلنا أي قضية بسيطة p في القضية المركبة المقيدة A بنفيها وتحويل $\vee$ إلى $\wedge$ والعكس فإننا سنحصل على قضية أخرى B تكافئ منطقياً $\sim A$

مثال:

في القضية $p \wedge \sim q$ نستبدل p بنفيها وكذلك نستبدل $\sim q$ بنفيها وكذلك نستبدل $\wedge$ بالأداة $\vee$ فنحصل على القضية $\sim p \vee q$ وهي تكافئ $\sim (p \wedge \sim q)$ ويمكن التحقق من صحة ذلك بجدول صدق القضيتين.

استناداً إلى قواعد الاستدلال السابقة نستطيع استنتاج العديد من القوانين التي تساعد في اثبات الاقتضاء المنطقي والتكافؤ المنطقي واثبات صحة الحجة المنطقية ومن أهم هذه القوانين ما يلي:

1. $p \wedge q \Rightarrow p \ , \ p \wedge q \Rightarrow q$
2. $p \Rightarrow p \vee q \quad q \Rightarrow p \vee q$

[redacted] [redacted]

3. $p \Rightarrow I$ ، $O \Rightarrow p$

4. $p \vee \sim p \Rightarrow I \,,\, p \wedge \sim p \Rightarrow O$

5. $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow p$

6. $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

7. $(p \to q) \wedge p \Rightarrow q$

8. $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

9. $p \to q \Rightarrow \sim p \vee q$

10. $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

11. $\sim (p \vee q) \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$

وبالامكان استنتاج المزيد من قضايا الاقتضاء المنطقي والقضايا المتكافئة باستخدام قواعد الاستدلال كما هو موضح بالأمثلة التالية:

مثال:

أوجد قضية مقيدة تكافئ منطقياً القضية: $(p \wedge q) \to r$

الحل:

باستخدام قاعدة التعويض نجد أن $(p \wedge q) \to r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv \sim p \vee \sim q \vee r$

مثال:

أوجد قضية تحتوي على أداتي الربط $\wedge$,$\sim$ فقط وتكافئ منطقياً القضية: $\sim p \to (q \to r)$

الحل:

$$\sim p \to (q \to r) \equiv p \vee (\sim q \vee r) \equiv \sim (\sim (p \vee (\sim q \vee r))) \equiv \sim (\sim p \wedge \sim (\sim q \vee r))$$
$$\equiv \sim (\sim P \wedge q \wedge \sim r)$$

ملاحظة:

باستخدام الاستدلال المنطقي نستطيع اثبات الاقتضاء المنطقي كما هو موضح بالمثال التالي:

مثال:

باستخدام طريقة الاستدلال المنطقي اثبت أن $(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$

الاثبات

$$(p \to q) \wedge \sim q \Rightarrow (\sim p \vee q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim q \wedge (\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim p) \vee (\sim q \wedge q)$$
$$\Rightarrow (\sim q \wedge \sim p) \vee O \Rightarrow \sim q \wedge \sim p \Rightarrow \sim p$$

اثبات صحة الحجة المنطقية باستخدام قوانين الاستدلال:

عندما تكون المقدمات في أي حجة منطقية متعددة فإنه يصعب تكوين جداول الصدق لانها تحتـاج إلى جهد ووقت أكثر وخاصة إذا زاد عدد القضايا المكونة للحجة عن 3 قضايا ولهذا نلجأ إلى طريقة أخرى لاثبات صحة الحجة المنطقية وهي الاثبات بقوانين التكافؤ المنطقي وقواعد الاستدلال والجدول التـالي يوضح أهم القوانين المستخدمة:

اسم القانون	الاختصار	القانون	اسم القانون باللغة العربية
Modus ponens	*MD*	$p \to q$ p $\therefore q$	الافتراض المنطقي (طريقة التأكيد) (طريقة الفصل)
Modus tollens	*MT*	$p \to q$ $\sim q$ $\therefore \sim p$	فرض نفي الخلاصة
Conjuctive Simplfication	*Simp*	$p \wedge q$, $\therefore q$ $p \wedge q$, $\therefore p$	الاختصار
Disjunctive addition	*add*	p , $\therefore p \vee q$ q , $\therefore p \vee q$	الجمع
conjunctive addition	*conj*	p q $\therefore p \wedge q$	الوصل المنطقي
Disjunctive syllogism	*D.S*	$p \vee q$, $\sim p$, $\therefore q$ $p \vee q$, $\sim q$, $\therefore p$	القياس المنطقي للفصل
Hypothetical syllogism	*H.S*	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	القياس المنطقي للفرض
Dilemma	*C.D*	$p \vee q$ $(p \to r) \wedge (q \to s)$ $\therefore r \vee s$	البناء
		$(p \to r) \wedge (q \to s)$ $\sim r \vee \sim s$ $\therefore \sim p \vee \sim q$	الهدم

مثال:

استخدم قوانين الاستدلال لتبين ما إذا كانت الحجة التالية صحيحة أو باطلة.

$$(A \to B) \wedge (C \to D)\ ,\ \sim(\sim A \wedge \sim C), \therefore \sim(\sim B \wedge \sim D)$$

الحل:

1) $(A \to B) \wedge (C \to D)$

2) $\sim(\sim A \wedge \sim C)$

3) $A \vee C$ (2) قانون دي مورجان

4) $B \vee D$ (3),(1) البناء

5) $\therefore \sim(\sim B \wedge \sim D)$ (4) قانون دي مورجان

إذاً الحجة صائبة

تمارين:

فيما يلي استخدم قوانين الاستدلال لتبين ما إذا كانت الحجة المعطاة صحيحة أو باطلة.

(1

مقدمة1: إذا كان اليوم السبت فإنه لدي اختبار في أسس الرياضيات أو الجبر الخطي

مقدمة2: إذا كان مدرس أسس الرياضيات مريضاً فإنه لن يكون هناك اختبار في أسس الرياضيات.

مقدمة3: اليوم السبت ومدرس أسس الرياضيات مريض.

النتيجة: لدي اختبار في الجبر الخطي.

(2

مقدمة1: إذا كنت مدرس رياضيات فإنك إنسان منطقي.

مقدمة2: أنت لست بالإنسان المنطقي.

النتيجة: أنت لست مدرس رياضيات.

(3

مقدمة1: إذا كان اليوم هو الاثنين فإن المكتبة مفتوحة.

مقدمة2: إذا كانت المكتبة مفتوحة فإنه يجب على أحمد أن يدرس في المكتبة.

النتيجة: إذا كان اليوم هو الاثنين فإنه يجب على أحمد أن يدرس في المكتبة.

(4

مقدمة1: إذا كان 8 عدداً زوجياً فإن العدد 9 لا يقبل القسمة على 2 بدون باق.

مقدمة2: إما 7 عدد غير أولي أو العدد 9 لا يقبل القسمة على 2 بدون باق.

مقدمة3: العدد 7 عدد أولي.   النتيجة: 8 عدد فردي

5) $S \to (\sim E \wedge \sim W)\ ,W \quad \therefore \sim S$

6) $(A \to E) \wedge (E \to D)\ ,\ \sim(\sim\sim A \wedge \sim B) \to C\ ,\sim D \quad \therefore C$

7) $(A \to B) \wedge C\ ,\ (D \to E) \wedge (C \to D) \quad \therefore \sim(\sim E \wedge \sim B)$

8) $(A \to B) \wedge (B \to C)\ ,\ \sim(\sim A \wedge \sim D)\ ,\ D \to (E \wedge F) \quad \therefore \sim(\sim C \wedge \sim (E \wedge F))$

9) $\sim p \to (r \wedge \sim s)\ ,\ t \to s\ ,\ u \to \sim p\ ,\ \sim w\ ,\ u \vee w \quad \therefore \sim t \vee w$

10) $p \to q\ ,\ r \vee s\ ,\ r \to t\ ,\sim q\ ,\ u \to v\ ,\ s \to p \quad \therefore \sim(\sim t \wedge \sim w)$

11) $(\sim p \vee q) \to r\ ,\ s \vee \sim q\ ,\ \sim t\ ,\ p \to t\ ,\ (\sim p \wedge r) \to \sim s \quad \therefore \sim q$

12) $A \to (B \vee C), \sim(\sim B \wedge \sim C) \to D, \sim(\sim A \wedge \sim E), (E \to F) \wedge (F \to G) \quad \therefore D \vee G$

13) $p \vee (q \wedge r)\ ,\ (p \vee q) \to s \quad \therefore p \vee s$

14) $\sim(\sim p \wedge \sim q)\ ,(q \vee p) \to r \quad \therefore r$

النجاح لا يأتي إلا بإتباع عاداته والتي من بينها:

- أن تكون واقعياً.
- أن تخلق خبرتك الخاصة بك.
- أن تكون مكافأة الحياة بالنسبة لك فيما تنجزه من أعمال.
- تنجح عندما تُعلم الناس كيف يتعاملون معك.
- التسامح هو أحد قوى النجاح.
- التفكير دائماً في النجاح وإمكانية تحقيقه ،والابتعاد عن البيئة السلبية والفشل.
- لا تتوقف عن التعلم ،عليك بالعودة إلي جو الدراسة من آن لآخر والقراءة المستمرة .
- عليك بالمثابرة والعمل الجاد ولا تستسلم ،فالنجاح هو سباق مداه طويل وليس سباقاً قصيراً تنتهي منه بانتهاء السباق.
- تعلم من الأخطاء واعترف بها حتى تصل إلي الحقائق التي تمكنك من النجاح الحقيقي وليس الكاذب.

الحجة المنطقية العامة:

درسنا في البند السابق الحجة المنطقية التي جميع مقدماتها والنتيجة قضايا مفردة وفي هذا البند سنناقش الحجة المنطقية التي تحتوي على قضية عامة أو عدد من القضايا العامة (أي تحتوي على مسور كلي أو مسور جزئي أو كليهما)

مثلاً الحجة التالية تحتوي على قضية عامة وهي المقدمة الأولى وقضيتين مفردتين هما المقدمة الثانية والنتيجة:

مثال

الشكل البياني التالي يوضح أن الحجة التالية باطلة كما ذكرنا سابقاً:

مقدمة1: بعض الرياضيون فلاسفة

مقدمة2: أحمد رياضي

النتيجة: أحمد فيلسوف



لاحظ أن الحجة غير صائبة لأنه ليس كل الرياضيون فلاسفة.

مثال:

عبر رمزياً عن الحجة المنطقية التالية:

مقدمة1: كل الأعداد الصحيحة أعداد قياسية.

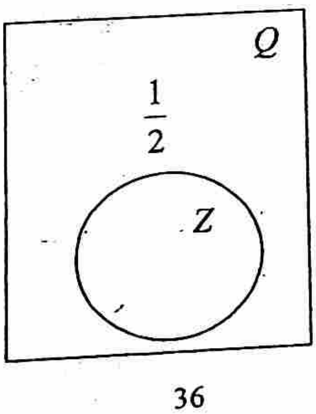
مقدمة2: العدد $\frac{1}{2}$ عدد قياسي وليس عدد صحيح.

النتيجة: يوجد أعداد قياسية ليست أعداد صحيحة.

الحل:

$$(\forall x)(x \in Z \to x \in Q) \ , \ \frac{1}{2} \in Q \wedge \frac{1}{2} \notin Z \ , \ \therefore (\exists x)(x \in Q \wedge x \notin Z)$$

لاحظ أن هذه الحجة صائبة كما هو واضح من الشكل البياني التالي:



[redacted]

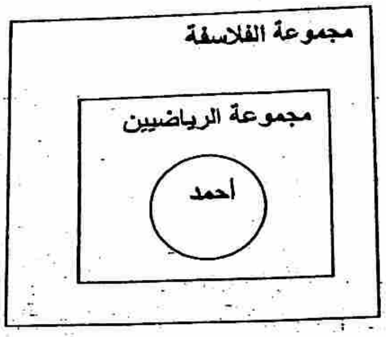
مثال:

الحجة التالية صائبة منطقياً كما هو موضح بالشكل البياني

مقدمة1: كل الرياضيون فلاسفة

مقدمة2: أحمد رياضي

النتيجة: أحمد فيلسوف



اثبات صحة الحجة المنطقية العامة:

عرفنا أن الحجة تكون صائبة في حالة صواب كل المقدمات يؤدي إلى صواب النتيجة أما إذا كانت كل المقدمات صائبة والنتيجة خاطئة كانت الحجة خاطئة وعلى هذا الأساس سنختبر صحة الحجة المنطقية العامة:

1. إذا كانت جميع المقدمات والنتيجة قضايا عامة تشتمل كل منها على أداة المسور الكلي $\forall$ (أداة الكم الشامل) فإن الحجة المنطقية تكون صائبة إذا كانت مجموعة العناصر التي تحقق النتيجة هي ضمن مجموعة العناصر التي تحقق أي مقدمة.

مثال:

الحجة التالية صائبة:

مقدمة1: كل الأعداد الصحيحة أعداد قياسية.

مقدمة2: كل الأعداد القياسية أعداد حقيقية.

النتيجة: كل الأعداد الصحيحة أعداد حقيقية.

مثال:

الحجة التالية باطلة:

مقدمة1: كل الدوال القابلة للتفاضل متصلة.

مقدمة2: كل الدوال المتصلة قابلة للتكامل.

النتيجة: كل الدوال القابلة للتكامل قابلة للتفاضل.

2. إذا كانت جميع المقدمات قضايا عامة والنتيجة قضية مفردة فإن الحجة تكون صائبة إذا كانت النتيجة عنصراً في مجموعة العناصر التي تحقق كل مقدمة.

مثال:

الحجة التالية صائبة:

مقدمة1: كل طالب ذكي ضمن طلاب قسم الرياضيات.

مقدمة2: كل طالب بقسم الرياضيات يكون متفوق.

النتيجة: أنس طالب ذكي ومتفوق.

مثال:

الحجة التالية باطلة:

مقدمة1: كل طالب بقسم الرياضيات ذكي.

مقدمة2: كل طالب بقسم الرياضيات متفوق.

النتيجة: أنس طالب ذكي ضمن طلاب قسم الرياضيات.

3. إذا كانت $P(x)$ جملة مفتوحة على المجموعة A والقضية العامة $\forall x \in A, p(x)$ صائبة فإن $P(a)$ صائبة لأي عنصر a في A وتصبح بذلك الحجة المنطقية التالية صائبة.

مقدمة1: $\forall x \in A, p(x)$

مقدمة2: $a \in A$

النتيجة: $P(a)$

مثال:

الحجة التالية صائبة:

مقدمة1: كل انسان فان.

مقدمة2: سقراط انسان.

النتيجة: سقراط فان.

3. إذا كانت $P(x)$ جملة مفتوحة على المجموعة A والقضية $p(a)$ صائبة لعنصر ما a في A فإن القضية العامة $\exists x \in A, P(x)$ صائبة ولذلك الحجة المنطقية التالية صائبة.

مقدمة1: $a \in A$

مقدمة2: $p(a)$

النتيجة: $\exists x \in A, P(x)$

مثال:

الحجة التالية صائبة:

مقدمة1: $f(x) = \frac{1}{x}$ دالة غير متصلة عند الصفر.

مقدمة2: الدالة غير المتصلة غير قابلة للتفاضل.

النتيجة: توجد دوال غير قابلة للتفاضل.

تمارين:

بين أي من الحجج المنطقية التالية صائبة:

1. مقدمة1: كل الأعداد القياسية أعداد حقيقية

مقدمة2: $\sqrt{5}$ عدد حقيقي وليس قياسي

النتيجة: يوجد أعداد حقيقية ليست قياسية.

2. مقدمة1: كل عدد زوجي يقبل القسمة على 2

مقدمة2: 10 عدد زوجي

النتيجة: 10 يقبل القسمة على 2

3. مقدمة1: 3 عدد صحيح

مقدمة2: العدد الصحيح هو عدد قياسي.

النتيجة: توجد أعداد صحيحة قياسية.

4. مقدمة1: كل عدد قياسي هو عدد حقيقي

مقدمة2: $\frac{3}{4}$ عدد قياسي

النتيجة: $\frac{3}{4}$ عدد حقيقي